

# SPEXXX



## مرحله نهایی ایلیمپیاد

۲۴ و ۲۵ اسفند ۱۴۰۱ - ایران

## اعضای مؤسسه

ایلیمپیاد ریاضی، ابتکاری از سوی مؤسسه فرودنتال در دانشگاه اوترخت است. کمیته ایلیمپیاد، مسئول سازماندهی و طراحی تکالیف این مسابقه است. این کمیته شامل افراد زیر است:

**Marcel Daems**

Gymnasium Sorghvliet, The Hague

**Eric van Dijk**

Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

**Tom Goris**

FontysLerarenopleiding, Tilburg

**Dédé de Haan**

Freudenthal Institute, Utrecht

**Senta Haas**

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Germany

**Kim Kaspers**

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

**Johan van de Leur**

Mathematisch Instituut, Utrecht University

**Matthias Lippert**

Bezirksregierung Köln, Germany

**Ruud Stolwijk**

CITO, Arnhem, Vrijeschool Zutphen VO, Zutphen

**Monica Wijers**

Freudenthal Institute, Utrecht

Secretariat:

**Mariozee Wintermans**

Freudenthal Institute, Utrecht

Thanks to:



**Ruben Dijkstra & Ruud Lammers**

Waterfall Games

The Olympiad is made possible in part by grants from:

Ministry of Education, Culture and Science (Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap)

CASIO, Amstelveen

## در ابتدا:

- ابتدا متن کامل تکالیف را بخوانید تا بدانید در این دو روز امتحان دقیقاً از شما چه خواسته شده است.
- تا جای ممکن تکالیف را تقسیم کنید.

## برنامه ریزی:

- در حین کار بر روی تکالیف‌های مختلف به زمان توجه داشته باشید.
- علاوه بر ارائه تکالیف یک ارائه هم باید آماده کنید اطلاعات بیشتر در مورد ارائه در آخر هفته ارائه خواهد شد.
- از قبل برنامه ریزی کنید که هر کاری را چه کسی و در چه زمانی شروع می‌کند.
- تا بعد از ظهر پنج‌شنبه ساعت ۱۸، برای حل و ارائه تکالیف فرصت خواهید داشت.

## برای ارائه:

- تکالیف را در قالب یک فایل (ترجیحاً PDF) تا ساعت ۱۸ روز پنج‌شنبه تحویل دهید.
- یک ارائه ۲۰ تا ۴۰ دقیقه‌ای از راه حل‌های خود آماده کنید و فیلم آن را تا ساعت ۱۸ روز جمعه تحویل دهید.
- روی چند کامپیوتر اطمینان حاصل کنید که فایل‌تان باز شود.
- گروه داوری نسخه‌های دیجیتالی فایل ارسالی را دریافت می‌کند، بنابراین می‌توانید از رنگ‌ها در تکالیف استفاده کنید.
- مسئولیت باز شدن یا نشدن فایل‌ی که تحویل می‌دهید برعهده خودتان است.

## معیار تصحیح:

- تمام یافته‌های خود را در یک گزارش واضح به طور مستقل از صورت تکالیف، ترکیب و ارائه کنید. تمرکز بر روی تکالیف نهایی همراه با استدلال و اثبات باشد.
- برای داوری، موارد زیر مورد توجه قرار می‌گیرند:

- شرح و گزارش تکالیف ۱ تا ۴ و تکلیف نهایی؛
- کامل بودن پاسخ‌های بخش‌های مختلف؛
- به کارگیری ریاضیات؛
- استدلال و توجیه انتخاب‌های انجام شده؛
- عمق پاسخ به تکالیف مختلف؛
- چگونگی ارائه: ظاهر، انسجام، خوانایی، تصاویر و غیره؛
- اصالت و خلاقیت.

موفق باشید و خوش بگذره!

## مقدمه

تکلیف نهایی ایلیمپیاد در مورد بازی Spexx، یک بازی استراتژیک با تاس است. چندین بار بازی را انجام دهید تا با قوانین و استراتژی‌ها آشنا شوید. البته محاسبه احتمال و استدلال ریاضی را نیز انجام دهید و نگاهی انتقادی به امتیازدهی داشته باشید. در نهایت، سیستم امتیازدهی و در صورت لزوم قوانین جدیدی را برای نسخه ساده شده این بازی وضع کنید.

یک توضیح راجع به بازی را می‌توانید در لینک‌های زیر مشاهده کنید:

<https://www.youtube.com/watch?v=B5Au2xlBiRU>

<https://www.yucata.de/en/Rules/Spexxx>

## تاس

شانس این که بتوانید یک بلوک را مثلاً روی یک مربع قرمز قرار دهید به سختی قابل محاسبه است. اما ما می‌توانیم با انداختن تاس و تکرار آن به اندازه کافی به این احتمال به صورت تجربی نزدیک شویم.

بنابراین هر تیم "داده تولید می‌کند". در داخل پیوست، دستورالعمل‌هایی در مورد این که چگونه تاس بریزید و چه راهبردی داشته باشید، خواهید دید. نتایج خود را به کمیته برگزاری ارسال کنید.

## Spexxx

تنها راه برای به دست آوردن یک درک ریاضیاتی از بازی این است که آن را چند بار بازی کنید. در این تکالیف ما فقط نوع دو نفره آن را در نظر می‌گیریم. بنابراین، بازی را دو نفره انجام دهید و درباره یافته‌های خود با یکدیگر صحبت کنید.

## تکلیف ۱: محاسبه (احتمال) با Spexxx

هنگام بازی Spexxx همواره پنج تاس پرتاب می‌کنید. البته برای پرتاب پنج تاس، بی‌شمار تکلیف احتمالی قابل تعریف است.

الف) احتمال اینکه پنج عدد یکسان در یک بار تاس ریختن ظاهر شود را محاسبه کنید.

شما می‌خواهید یک بلوک در ناحیه بنفش زمین بازی قرار دهید. شما بعد از دو پرتاب سه تا ۵ را کنار گذاشته‌اید و می‌توانید دو پرتاب دیگر داشته باشید. در پرتاب سوم، یک ۱ و یک ۳ می‌آورید.

ب) کدام هوشمندانه‌تر است؟ این که ۱ را کنار بگذارید و سعی کنید یک ۱ دیگر در پرتاب چهارم بیاورید، یا دوباره هر دو تاس را پرتاب کنید؟

برای بستن راه حریف خود، لازم است یک مهره روی مربع آبی ۴، ۴، ۴، ۱ قرار دهید.

این کار اصلاً آسان نیست، اما در پرتاب سوم ناگهان دارید: ۱، ۳، ۴، ۴، ۶

پ) کدام تاس را کنار می‌گذارید و در پرتاب چهارم، کدام تاس را دوباره می‌ریزید؟ شانس دستیابی به هدفتان چقدر است؟

متین چنین ادعا می‌کند: «شانس ترکیب نقره‌ای (پنج عدد پشت سر هم) در واقع کم‌تر از شانس ترکیب طلایی (پنج عدد یکسان) است. چون فقط دو احتمال برای ترکیب نقره‌ای وجود دارد، یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۲، ۳، ۴، ۵، ۶. ولی برای ترکیب طلایی، شما شش گزینه مختلف دارید.

ت) بررسی کنید که متین درست می‌گوید یا خیر؟

## تکلیف ۲: قرار دادن بلوک های استراتژیک



شما اولین مکعب خود را در بخش بنفش روی مربعی که در تصویر بالا می بینید، قرار می دهید.

الف) مکعب بعدی خود را در چند مکان می توانید قرار دهید تا بتوانید در نوبت سوم خود امتیاز بگیرید (به طوری که سه مکعب پشت سر هم داشته باشید)؟ فرض کنیم حریفی وجود ندارد.

ب) یک تخمین منطقی از احتمال موفقیت در سومین نوبت خود (با فرض نبودن حریف) ارائه دهید.

Spexxx بازی جذابی است که بدون تاس هم امکان پذیر است. در این تکلیف دو نفره بازی کنید. به طوری که هر بازیکن دوازده بلوک دریافت کند. به نوبت یک بلوک روی صفحه قرار دهید و امتیاز را مشخص کنید.

پ) اگر حریف مانع شما نشود، حداکثر امتیازی که می توانید با دوازده بلوک کسب کنید چقدر است؟

شما همچنین می توانید با هم متحد شوید تا بیشترین امتیاز ممکن را به دست آورید.

ت) حداکثر امتیاز ممکن را برای خود و حریفان با هم تعیین کنید.

در هر نوبت این دوراهی پیش می آید: آیا من برای نفع خودم پیش می روم یا حریفم را مسدود می کنم؟ آیا یک استراتژی همیشه برنده وجود خواهد داشت؟

ث) بررسی کنید که آیا چنین استراتژی برنده ای وجود دارد یا خیر و یک گزارش مستدل از جستجو و استراتژی پیدا شده ارائه دهید.

### تکلیف ۳: موقعیت‌های بازی



احمد (سفید) و مهشید (سبز) اغلب این بازی را انجام می‌دهند. در مرحله‌ای از بازی، شرایط فوق به این شکل بود. مهشید یک بلوک دیگر برای گذاشتن روی صفحه دارد.

الف) آیا امتیازها تا اینجا درست است؟

ب) یک تخمین مستدل از شانس برنده شدن مهشید (سبز) ارائه دهید. شیوه‌های مختلف برای این حالت را بررسی کنید.





یک موقعیت دیگر در بازی! احمد (سفید) و مهشید (سبز) هر دو یک بلوک برایشان باقی مانده است. نوبت مهشید است. به نظر می‌رسد احمد در هر حال شکست می‌خورد، اما ظاهر بازی می‌تواند فریبنده باشد.

پ) به مهشید (سبز) چه توصیه‌ای می‌کنید؟ سعی کند جلوی پیروزی احمد را بگیرد یا به دنبال امتیاز خودش باشد؟ البته توصیه خود را ثابت کنید.

### تکلیف ۴: امتیاز

می‌توانید سیستم امتیازدهی کامل Spexxx را در کادر سمت راست بالای صفحه بازی ببینید. تجزیه و تحلیلی از این سیستم امتیازدهی انجام دهید که در آن نکات زیر را لحاظ می‌کنید. تا حد امکان همه چیز را با استدلال‌های ریاضی ثابت کنید:

- آیا امتیازدهی "عادلانه" است؟ (بطور کلی امتیاز دهی "عادلانه" چیست؟)
- در مورد داده‌هایی که با هم تولید کرده‌ایم و اکنون دریافت کرده‌اید، چه می‌توانید بگویید؟
- یک سیستم امتیازدهی جایگزین ارائه دهید.

## تکلیف نهایی و ارائه

همچنین می‌توانید Spexxx را روی صفحه کوچک شده بازی کنید: زمینه‌های بنفش و قرمز حذف می‌شوند و به جای چهار بار تاس ریختن با پنج تاس، چهار تاس را سه بار بریزید.



یک سیستم امتیازدهی مناسب برای این بازی جایگزین طراحی کنید. از نتایج تکلیف ۴ استفاده کنید. در صورت لزوم، قوانین بازی و یا صفحه بازی را نیز تنظیم کنید. سیستم امتیازدهی خود را توجیه کنید و هم‌چنین از تجربیات بازی با سیستم قبلی استفاده کنید.

می‌توانید هنگام ارائه، بازی جایگزین خود را بازی کنید . . .

## پیوست: ترکیب‌های مختلف تاس‌ها

### طلا

هدف: پس از چهار پرتاب، شما پنج تاس از یک عدد خواهید داشت.  
استراتژی: پرتکرارترین عدد را کنار بگذارید و به بازی با هدف آوردن آن شماره ادامه دهید. اگر دو یا چند تاس مشابه وجود نداشت، دوباره هر پنج تاس را پرتاب کنید.  
این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که پنج عدد مساوی داشتید، ثبت کنید.

### نقره

هدف: پس از چهار پرتاب، پنج شماره پشت سر هم دارید.  
استراتژی: ۱ و ۶ را تا جایی که ممکن است کنار بگذارید تا دنباله از ابتدا ثابت نشده باشد.  
این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که ۵ عدد متوالی داشتید ثبت کنید.

### برنز

هدف: پس از چهار پرتاب، شما چهار عدد پیاپی دارید.  
استراتژی: ۳ و ۴ در هر سه حالت ممکن باید باشند، بنابراین ابتدا آنها را بردارید.  
این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که ۵ عدد متوالی داشتید، ثبت کنید.

### قرمز

هدف: پس از چهار پرتاب، چهار تاس با عدد یکسان دارید.  
استراتژی: پرتکرارترین عدد را از اولین پرتاب کنار بگذارید و به بازی با هدف آوردن آن عدد ادامه دهید. اگر دو یا چند تاس مشابه وجود نداشت، دوباره هر پنج تاس را پرتاب کنید.

این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که چهار تاس با عدد یکسان داشتید، ثبت کنید.

### بنفش

هدف: بعد از چهار پرتاب شما سه تاس با یک عدد و دو تاس با عددی دیگر دارید.  
استراتژی: پرتکرارترین عدد را از اولین پرتاب کنار بگذارید و به بازی با هدف آوردن آن شماره ادامه دهید. اگر دو یا سه تاس یکسان وجود نداشتند، دوباره هر پنج تاس را پرتاب کنید.

این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که حالت بنفش آمده ثبت کنید.

### آبی

هدف: پس از چهار پرتاب، شما سه تاس با عدد مشابه دارید.  
استراتژی: پرتکرارترین عدد را از اولین پرتاب کنار بگذارید و به بازی با هدف آوردن آن شماره ادامه دهید. اگر دو یا چند تاس مشابه وجود نداشت، دوباره هر پنج تاس را پرتاب کنید.

این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که سه عدد برابر داشتید، ثبت کنید.

### سبز

هدف: پس از چهار پرتاب شما دو تاس با عدد مشابه دارید.  
استراتژی: اگر دو یا چند تاس مشابه وجود نداشت، دوباره هر پنج تاس را پرتاب کنید.  
این کار را ۵۰ بار انجام دهید و تعداد دفعاتی را که دو تاس با عدد برابر داشتید، ثبت کنید.