راهنمای ارزیابی پاسخ های دانش آموزان در

بیست و هشتمین مسابقه الیمپیاد ریاضی

در این راهنما معیارهای تصحیح برگه‌های دانش‌آموزان ارائه شده است. این معیارها بر اساس راه حل-های اعضای هیات داوران و همچنین پاسخ‌های دانش‌آموزان و ایده‌های مطرح شده توسط آن‌ها است. به همین دلیل ممکن است جامعیت نداشته و راه حل‌های دیگری هم وجود داشته باشد که قابل قبول باشند. در این راهنما محدوده‌ی پاسخ‌های قابل و قبول و تعدادی از راه حل‌ها و ایده‌های ممکن ارائه گردیده است پس از مصححین عزیز خواهشمندیم که **از این راهنما صرفا به عنوان یک کلید اولیه استفاده نموده** و در صورت مشاهده پاسخ‌های منطقی دیگر (که توسط خود مصحح و در صورت نیاز با مشورت با یکی از اعضای هیات داوران تشخیص داده شود)، آن را با هیات داوران در میان گذاشته تا به این مجموعه اضافه گردد.

در انتخاب برگه‌های برتر بیش از هر چیز به پاسخ دانش‌آموزان در سوالات نهایی دقت می‌شود. در نتیجه مصححین هم این به مساله دقت داشته و برگه‌هایی که در سوال نهایی توفیق داشته‌اند را معرفی نمایند این به این معنی است که اگر گروهی حتی مسائل دیگر را پاسخ نداده اما در سوالات نهایی پاسخ قابل قبول ارائه کرده است آن برگه را به عنوان برگه برتر معرفی نمایید (هرچند در واقع چنین اتفاقی نخواهد افتاد). با این وجود تمام سوالات باید مطالعه و ارزیابی شود.

در تصحیح سوالات به این نکته توجه کنید که همه ۶ سوال این آزمون در راستای حل یک مساله‌ی کلی است. در نتیجه ممکن است دانش‌آموزی پاسخ یک سوال را در سوال دیگر آورده باشد (مخصوصا در ۵ مساله مقدماتی). به همین دلیل مصحح عملکرد گروه در کل آزمون را باید مدنظر داشته باشد.

تصحیح بر اساس نمره دهی انجام نمی‌گیرد بلکه بر مبنای مقایسه برگه‌ها و انتخاب برگه‌های برتر از میان آن‌ها انجام خواهد گرفت. طبیعتا هر چه به سوالات پایانی نزدیک‌تر می‌شویم، سوالات پیچیده‌تر و حائز اهمیت بیشتری خواهد بود. به همین دلیل در مقایسه برگه‌ها پس از سوال نهایی (که بیشترین اهمیت را دارد)، سوالات پایانی مقدماتی (۵ و ۴) در درجه اهمیت بعدی قرار دارند.

معیارهای ارزیابی

تکلیف ۱ :

داده‌ها :

- میزان برق و گاز مورد نیاز در طول یک سال:
  - برق: $3500\ kWh$
  - گاز: $1500\ m^3$
- هزینه:
  - برق: $1\ kWh$ $0.17\ €$
  - گاز: $x\ (m^3)$ $0.54x + 195\ €$
- طول عمر صفحات:
  - 20 سال
- معادل‌سازی انرژی حاصل از گاز با kWh: (از داده‌های تکلیف 2 استفاده شده)
  - $1500\ m^3 \equiv$ گاز $3500\ kWh$ برق

خواسته‌های مساله :

- کل انرژی مورد نیاز در سال:
  - $3500 + 18500 = 22000\ kWh$
- هزینه‌ی انرژی خورشیدی برای 20 سال:
  - $(22000 \div 150) \times 300 = 44000\ €$
- هزینه‌ی انرژی فسیلی برای 20 سال:
  - $20 \times [(3500 \times 0.17) + 195 + (0.54 \times 1500)] = 32000\ €$

تکلیف ۲ :

- گاز: $195 + (0.54 \times 1500) = 1005\ €$
- برق: $18500 \times 0.17 = 3145\ €$

- صفحه‌ی خورشیدی: $[(18500 \div 150) \times 300] \div 20 = 1850\ €$

هدف از سوال های ۱ و ۲ بیشتر آشنا شدن با مساله و دید پیدا کردن نسبت به آن است. پس اهمیت زیادی ندارند و نیاز به صرف زمان زیادی روی آن ها نیست.

تکلیف ۳ :

تقریباً $38.5\ kWh$ در ماه جولای یا به طور میانگین $1.3\ kWh$ در هر یک از روزهای ماه جولای. این عدد از مجموع تفاضلات میزان برق تولیدی و میزان برق مصرفی برای روزهایی که میزان تولید کمتر از مصرف بوده به دست آمده است. هدف از این سوال یادآوری این مساله است که باتری برای ذخیره سازی انرژی تولید مازاد روزهای دیگر وجود ندارد.

تکلیف ۴:

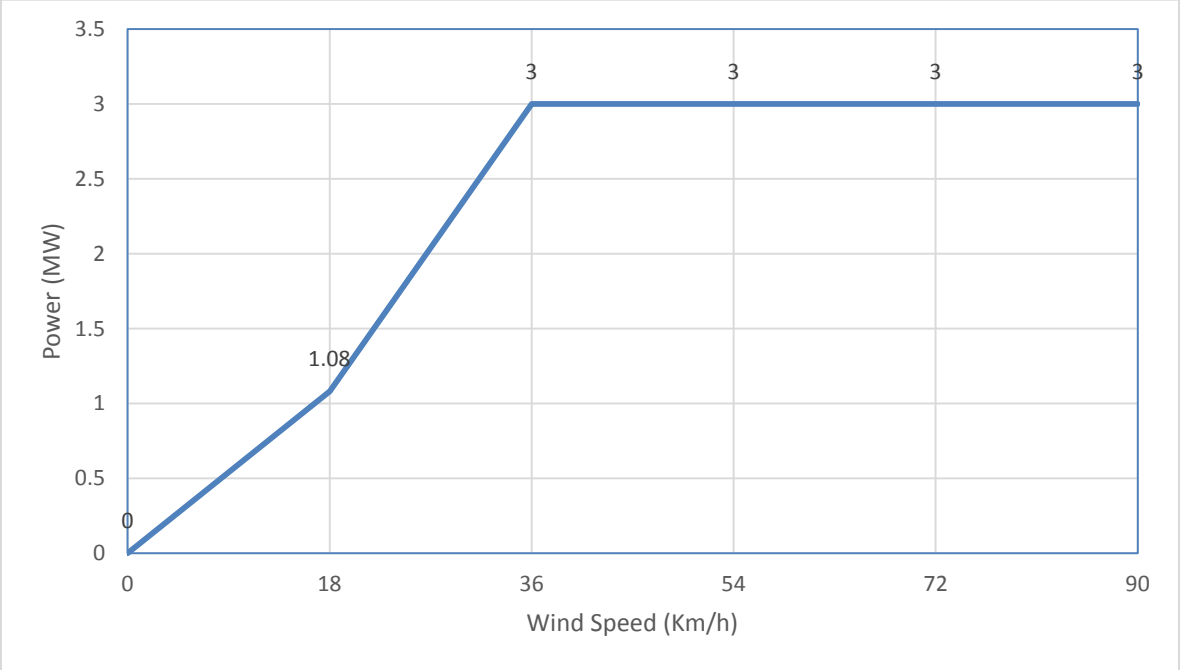
𝔸	زاویه : $= 35°$	$Ra_{max} = 99\ \%$	در جهت: Z
𝔹	زاویه : $= 30 - 35°$	$Ra_{max} = 94\ \%$	در جهت: ZO
ℂ	زاویه : $= 20 - 25°$	$Ra_{max} = 87\ \%$	در جهت: OZO

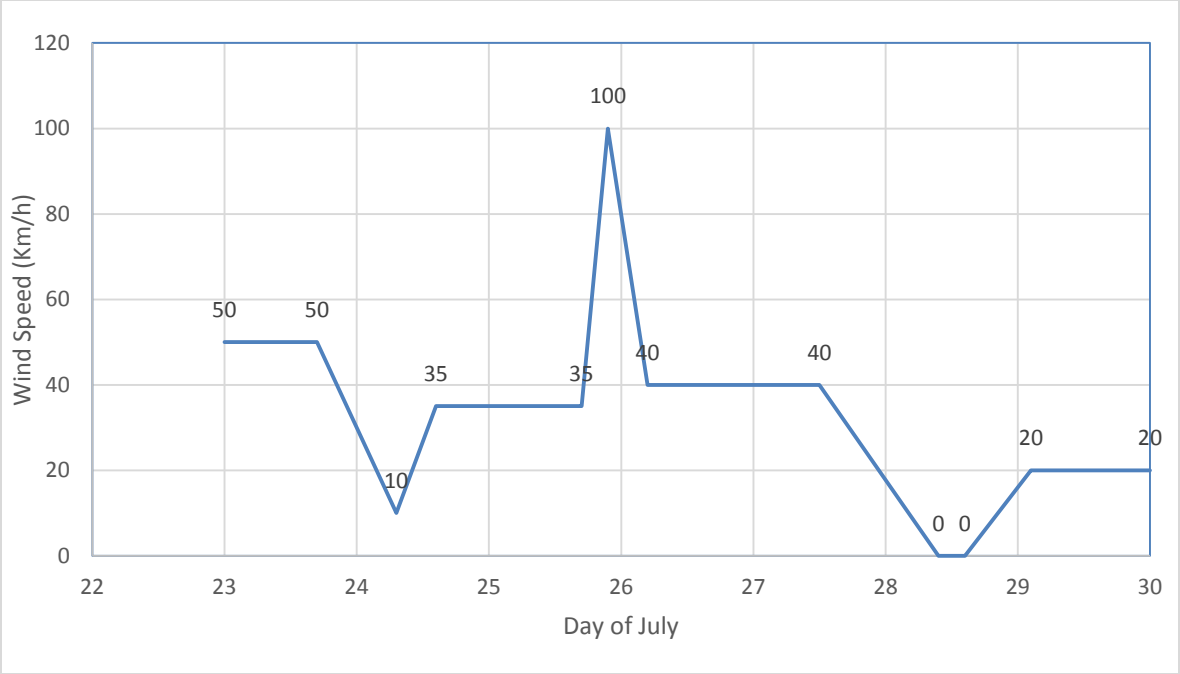
برای محاسبه این اعداد ابتدا محل برخورد راستای پنل ها (که عمود بر راستای خانه است) با منحنی های دایره ای در شکل که نشان دهنده زاویه جایگذاری است را مشخص کرده و حدود بازده را با توجه به شکل تخمین میزنیم. جهات فوق همان راستای پنل های خورشیدی روی خانه ها را نشان میدهد.

ممکن است در این سوال گروه هایی این ایده مطرح کرده باشند که پنل ها را همیشه به سمت جنوب صرفنظر از موقعیت و زاویه خانه نصب میکنیم تا به بیشترین مقدار بازده برسیم. اگرچه ممکن است ایده عملی خوبی باشد اما در این آزمون فرض بر آن است پنل ها باید در تعامد با راستای خانه نصب میشود. پس اگر گروهی آن را در نظر نگرفته باشد دچار اشتباه بزرگی شده است. مگر آن که زاویه خانه را به گونه ای در محاسبات خود لحاظ کرده باشد.

تکلیف ۵

داده های این مسئله نمودارهای سرعت روزانه باد و توان تولیدی برحسب سرعت باد است. که می توان این نمودار هارا بصورت زیر تقریب زد:





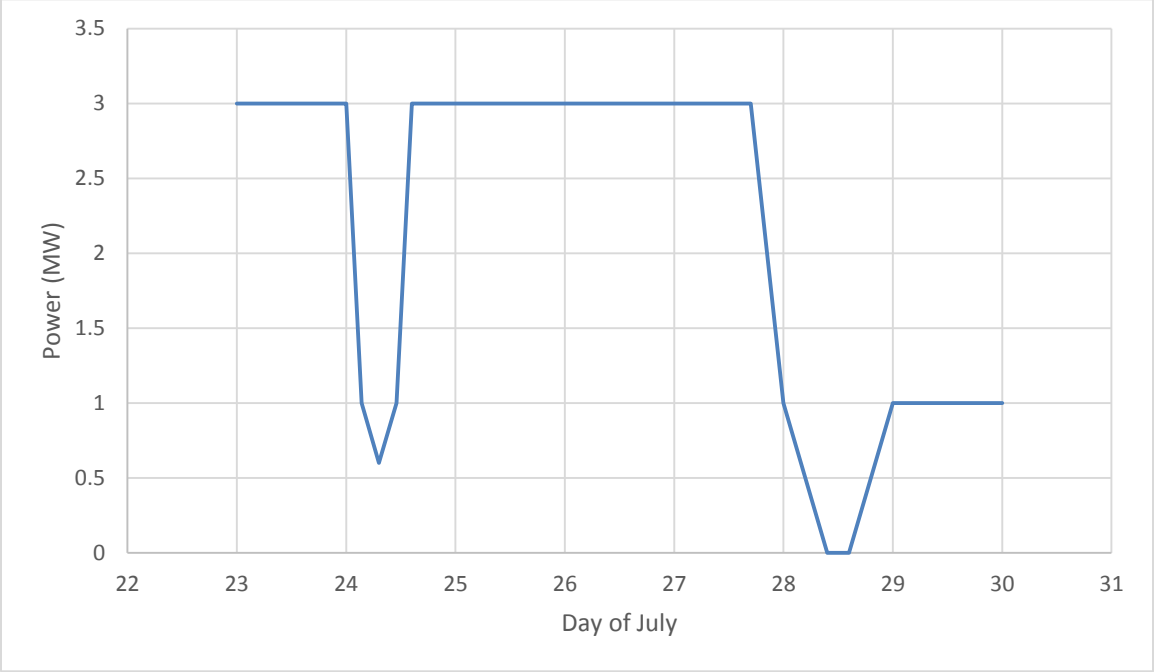
حال اگر بخواهیم بصورت دقیق محاسبات این تکلیف را انجام دهیم باید سرعت را برحسب تابعی از زمان و توان تولیدی توربین را برحسب تابعی از سرعت بیان کرده و سپس با استفاده از این دو رابطه و ترکیب توابع ، توان را برحسب زمان بدست می آوریم و از این رابطه انتگرال معین در بازه ۲۳ تا ۲۹ ژولای می گیریم تا مقدار دقیق انرژیی تولیدی توربین بادی را بدست بیاوریم:

$$V = f(t)$$

$$P = g(V)$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt = \int_{t_1}^{t_2} g\big(f(t)\big)\, dt$$

باتوجه به نمودار هایی که در صورت سوال آمده، این نمودار ها پیچیده اند و یافتن رابطه هایی که دقیقا این نمودار را نشان دهند کار مشکلی است در نتیجه می‌توان از نمودارهای تقریب زده شده که در ابتدا ذکر شد استفاده کرد و نمودار توان تولیدی برحسب زمان را رسم و سپس سطح زیر آن را محاسبه کرد. عدد حاصل میزان انرژی تولیدی طی ۲۳ تا ۲۹ ژولای را نشان می دهد.



حال اگر سطح زیر نمودار فوق را حساب کرده و عدد حاصل را در **۲۴** ساعت ضرب کنیم انرژی تولیدی در این هفته تقریبا برابر **۳۴۰** MWh بدست می آید.

روش محتمل دیگر برای حل این سوال نمونه برداری از نمودار صفحه ۶ در چند زمان مختلف و محاسبه توان تولیدی متناظر با آن در آن زمان و استفاده از ایده انتگرال گیری تخمینی است.

توجه: هرگونه تقریب منطقی که به حدود این جواب برسد قابل قبول است.

تکلیف نهایی

در این تکلیف از دانش آموز خواسته شده تا با توجه به داده های مساله یه طرح یا راهنما برای هر خانه ارائه دهد به طوری که در آن از انرژی‌های تجدید پذیر برای رفع نیاز انرژی مورد نیاز استفاده شود. در این سوال دانش آموز باید با ارائه یک **ملاک و معیار** منطقی خانه ها را دسته بندی کرده و برای هر کدام یک یا **چند طرح مناسب** ارائه کند و سپس طرح های مختلف را **دسته بندی** کرده و آن ها را از نظر قیمت، نواحی تحت پوشش بررسی کرده و **مقایسه** ای با طرح های دیگر انجام دهد.

نکات مهم در این تکلیف که باید حتما پوشش داده شده باشد در زیر آمده است.

- مصرف سالانه هر خانه حدود $3600KWh$ فرض شده است. یعنی مصرف همه خانه ها یکسان فرض شده و همچنین فرض شده که مصرف ماهانه هر خانه تغییراتی ندارد. یعنی همه ماه ها مصرف یکسان است. در نتیجه در هر ماه $300KWh$ مصرف داریم. **طرحی که ارائه می شود باید در نظر داشته باشد که انرژی ماهانه مورد نیاز باید حتما تامین شود**. زیرا توانایی ذخیره انرژی را نداریم که از مازاد ماه‌های قبلی استفاده کنیم.
- در طرح های ارائه شده فقط باید از صفحات خورشیدی (دو نوع بزرگ و کوچک) یا توربین های بادی (سه نوع) استفاده شود که مشخصات آن ها ارائه شده است. در صورت سوال آمده است که سه انتخاب داریم: **۱)** انتخاب یک صفحه بزرگ (۱حالت) **۲)** انتخاب یک صفحه کوچک و یک توربین بادی (۳ حالت) و **۳)** انتخاب یک توربین بادی (۳ حالت). بنابراین کلا ۷ حالت برای بررسی وجود دارد. در بررسی حالت ها علاوه بر مساله بالا (تامین انرژی در هر ماه) باید **مساله هزینه نیز در نظر گرفته شود**. واضح است که مشتریان تمایل به انتخاب طرح های کم هزینه تر دارند. در نتیجه باید مقایسه ای هم بین هزینه ها انجام گیرد.
- در بخشی از سوال آمده است که تمایل مشتریان برای انتخاب بعضی از ادوات (مثلا ترجیح به استفاده از صفحات خورشیدی به جای استفاده از توربین بادی به خاطر صدای آنها، یا ترجیح به استفاده از توربین به خاطر عدم فضای کافی در پشت بام برای صفحات خورشیدی) نیز لحاظ شود. بدین ترتیب در صورتی که **مقایسه منطقی بین طرح های مختلف** (از نظر وارد کردن سلیقه مشتریان) انجام گیرد به

عنوان پوئن مثبت لحاظ خواهد شد. بدیهی است که بخشی از مقایسه باید شامل **شرایط جغرافیایی و موقعیت خانه** باشد (از نظر زاویه خانه- تکلیف ۴) باشد و به وضوح اشاره شود که هر طرحی برای کدام مناطق مسکونی یا کدام موقعیت ها مناسب است.

چیزی که در بالا اشاره شده است مواردی است که یک گروه باید به آن توجه کرده باشد. هر گونه استدلال منطقی از طرف گروه ها که بتواند موارد فوق را پوشش دهد قابل قبول است. موارد **بولد** شده جز موارد ضروری است و کیفیت هر برگه با توجه به ارائه راه حل ها برای در نظر گرفتن این موارد تعیین می شود. اگر برگه ای فقط تعدادی از موارد بالا را پوشش داده باشد به **نسبت مشارکت** خود با تشخیص مصحح گرامی امتیاز خواهد گرفت.

با این وجود یک راه حل برای نمونه ارائه شده است تا مصححان یک دید کمی هم نسبت به این تکلیف داشته باشند اما به **هیچ وجه به این معنی نیست که راه حل های دانش آموزان باید شبیه به این راه حل باشد**. در اصل مصحح ایده دانش آموزان را با دقت مطالعه می‌کند و با توجه به استدلال و پشتوانه علمی ارائه شده برای آن و همچنین بیان دقیق روش‌های ارائه شده، پاسخ را ارزیابی می‌کند. پس معیار اصلی در ارزیابی این سوال کیفیت ایده‌های مطرح شده و پشتوانه علمی و کاربردی آن ایده است.

راه حل پیشنهادی:

در راه حل پیشنهادی خود راه‌های ممکن برای انتخاب (۷ حالت ذکر شده) را به طور کامل بررسی می‌کنیم و برای هر کدام میزان انرژی تامین شده در هر ماه را محاسبه می‌کنیم. اگر مقدار آن از $300KWh$ برای هر ماه بیشتر شد این بدان معنی است که آن طرح انرژی را به طور کامل تامین می‌کند در غیر اینصورت آن طرح مفید نخواهد بود. در مرحله بعد هزینه آن طرح را محاسبه می‌کنیم. و در نهایت همه طرح ها (۷ حالت به علاوه چند طرح دیگر برای بررسی های بیشتر) را با هم مقایسه می‌کنیم و مشخص می‌کنیم که هر کدام برای چه مناطق و موقعیت هایی مناسب است.

- روش محاسبه هزینه بسیار ساده است. از مجموع هزینه ادوات که در پیوست الف و ب داده شده است مجموع هزینه کل برای ۲۰ سال ارائه میشود.
- روش محاسبه انرژی تامین شده: ابتدا انرژی تامین شده توسط هر کدام از ادوات را محاسبه کرده و در نهایت با هم جمع می‌کنیم.

❖ انرژی تامین شده توسط توربین‌های بادی: بیشینه انرژی تامین شده در سال توسط هر توربین در پیوست ب ارائه شده است. این بیشینه مقدار، همان مقدار اشباع نمودار صفحه ۷ برای هر کدام از این توربین‌هاست. می‌دانیم که فقط در بعضی روزها که سرعت باد به اندازه کافی زیاد باشد این مقدار بیشینه قابل دستیابی است اما چون اطلاعات همه روزهای سال را در اختیار نداریم فرض می‌کنیم که این توربین ها همیشه در مقدار بیشینه خود انرژی تولید می‌کنند. **توجه کنید که این یک فرض ساده کننده است و ممکن است گروهی با توجه به نمودار صفحه ۶ تاثیر سرعت باد در میزان عملکرد توربین را نیز در نظر گرفته باشد** (هر چند که این نمودار فقط برای چند روز در سال ارائه شده است و ممکن است در روزهای دیگر الگوی سرعت باد اینگونه نباشد. اما اگر گروهی این را هم بررسی کرده باشد به عنوان یک پوئن منفی در نظر نگیرید و حتی می‌توان به عنوان یک پوئن مثبت هم لحاظ کرد اگر به درستی استفاده کرده باشد). با توجه به نمودار توزیع انرژی در پیوست ب می توان میزان انرژی تولیدی توسط هر توربین در هر ماه سال را محاسبه کرد که در جدول زیر آمده است.

جدول ۱) بیشینه انرژی بادی تولیدی توسط هر توربین بر حسب KWh

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
متیو	1404	1212	1212	840	672	600	540	756	876	1176	1176	1536
کاترینا	936	808	808	560	448	400	360	504	584	784	784	1024
سندی	128.7	111.1	111.1	77	61.6	55	49.5	69.3	80.3	107.8	107.8	140.8

از همین جدول متوجه می‌شویم که یک توربین سندی به تنهایی قادر به تامین انرژی یک خانه نیست اما دو توربین دیگر هر کدام توانایی تامین انرژی را به طور کامل دارند.

❖ انرژی تامین شده توسط صفحات خورشیدی: همان طور که اشاره شده هر متر مربع از این صفحات با زاویه ۴۰ درجه در راستای شمال جنوب قادر به تولید $330KWh$ انرژی است. با توجه به نمودار پیوست پ این عدد چیزی حدود ۹۸٪ از بیشینه مقدار (معادل ۱۰۰٪ که در ۳۵ زاویه درجه با کمی انحراف از راستای جنوب قابل دستیابی است) است. پس بیشینه مقدار برابر $336KWh$ است. با توجه به نمودار پیوست الف می توان توزیع این انرژی در هر ماه را محاسبه کرد (با ضرب عدد بالا در میزان درصد اعلام شده در نمودار). **توجه کنید که اینجا هم اثر بازده صفحات در روزهای مختلف یک ماه را در نظر نگرفتیم چون اطلاعات مربوطه داده نشده است اما ممکن است گروهی با توجه به نمودار صفحه ۴ تاثیر روزهای مختلف در میزان عملکرد صفحات را نیز در نظر گرفته باشد. که مصحح باید مشابه با حالت بالا با آن برخورد کند.** میزان انرژی تولیدی برای دو نوع صفحه ارائه شده در جدول زیر خلاصه است.

جدول ۲) بیشینه انرژی خورشیدی تولیدی توسط هر صفحه بر حسب KWh

	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
صفحه بزرگ (۳۰ متر مربع)	333	393	646	990	1151	1111	1323	1242	1111	899	505	393
صفحه کوچک (۲۰ متر مربع)	222	262	431	660	767	740	882	828	740	599	336	262

از همین جدول متوجه می‌شویم که یک صفحه کوچک به تنهایی قادر به تامین انرژی یک خانه نیست اما دیگری توانایی تامین انرژی را به طور کامل دارد.

توجه کنید که مقادیر جدول بالا بیشینه مقدار انرژی است و برای محاسبه مقدار واقعی آن باید با توجه به نمودار پیوست پ بازده صفحه را با توجه به زاویه خانه تعیین و در مقادیر بالا ضرب کرد.

به این ترتیب انرژی تامینی کل برابر است با مجموع انرژی بادی (جدول ۱) به علاوه انرژی خورشید (جدول ۲) با احتساب بازده. به عبارت ریاضی : $E_t = E_w + E_s.R$ که در آن R راندمان محاسبه شده از روی پیوست پ است.

- جدول زیر چند طرح مختلف را با توضیحات مربوطه نشان می‌دهد.

	طرح ۱	طرح ۲	طرح ۳	طرح ۴	طرح ۵	طرح ۶	طرح ۷
تعداد توربین متیو	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
تعداد توربین کاترینا	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰
تعداد توربین سندی	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۱
تعداد صفحات بزرگ	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
تعداد صفحات کوچک	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۰
هزینه کل	۹۰۰۰	۹۵۰۰	۱۶۰۰۰	۲۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۴۰۰۰	۳۵۰۰
مناطق تحت پوشش	بازده بیش از ۹۰٪	بازده بیش از ۷۷٪	همه مکان ها	همه مکان ها	همه مکان ها	همه مکان ها	هیچ مکانی
حداقل انرژی تامینی	۳۳۰ در ماه Dec	۳۵۰ در ماه Dec	۱۰۷۰ در ماه Nov	۱۳۴۰ در ماه Jul	۳۶۰ در ماه Jun	۵۴۰ در ماه Jun	۵۰ در ماه Jun

طرح های ۳ تا ۶ برای همه مکان ها مناسب است و انرژی لازم را تعیین می‌کند. اما تفاوت زیادی در هزینه و ادوات مورد استفاده دارند. طرح ۵ طرح اقتصادی است اما از یک توربین متوسط استفاده میکند که ممکن است سروصدای زیادی تولید کند. همچنین در این طرح اگر مصرف مشتری در ماه June کمی زیاد شود ممکن است در تامین انرژی دچار مشکل شود. طرح ۶ طرحی گران تر است اما در تامین انرژی مصرفی به هیچ مشکلی برخورد نخواهد کرد حتی اگر مشتری مصرفش تا نزدیک ۲ برابر بیشتر شود. این دو طرح برای مشتریانی که تمایل به استفاده از صفحات خورشیدی ندارند (مثلا به دلیل کمبود فضا) مناسب است. طرح های ۳ و ۴ بیشتر مناسب مناطق تجاری است که مصرف بالایی دارند یا برای آپارتمان های چند طبقه که چند خانوار همزمان از این سیستم استفاده کنند.

طرح های اقتصادی تر ۱ و ۲ ارزان تر از بقیه هستند و از توربین استفاده نمی‌کنند یا از توربین های کوچک که سر و صدای زیادی ندارند استفاده می‌کنند که مناسب برای خانه های کوچک در مناطق ذکر شده است. خانه هایی که در منطقه بازده بیش از ۹۰٪ نیستند یا باید از توربین استفاده کنند یا اینکه از چند صفحه خورشیدی استفاده کنند تا بتوانند انرژی مصرفی خود را تامین کنند.

با آرزوی موفقیت

هیات داوران مسابقه آلیمپیاد سال ۹۵

خانه ریاضیات اصفهان