

# واکسیناسیون هدف مند



دور مقدماتی سی‌اُمین مسابقه الیمپیا

آذرماه 97

## Colophon

The Mathematics Alympiad (Wiskunde Alympiade) is an initiative of the Freudenthal Institute, Utrecht University. The Alympiad committee is responsible for the organisation of the Alympiad and for producing the assignment.

The committee consists of:

**Eric van Dijk**

Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

**Tom Goris**

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

**Dédé de Haan**

Freudenthal Instituut, Utrecht

**Senta Haas**

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Duitsland

**Jacques Jansen**

Strabrecht College, Geldrop

**Kim Kaspers**

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

**Johan van de Leur**

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

**Matthias Lippert**

Röntgen Gymnasium, Remscheid-Lennep, Duitsland

**Ruud Stolwijk**

CITO, Arnhem, Vrijeschool Zutphen VO, Zutphen

**Monica Wijers**

Freudenthal Instituut, Utrecht

Secretariat:

**Liesbeth Walther en Mariozee Wintermans**

Freudenthal Instituut, Utrecht

The Mathematics Alympiad is supported by:  
Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap  
CASIO, Amstelveen  
Texas Instruments, Utrecht  
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

## راهنمای مرحله مقدماتی مسابقه الیمپاد ریاضی ۹۷

این مرحله از مسابقه الیمپاد شامل 5 تکلیف مقدماتی و 2 تکلیف نهایی است. پنج سوال تکلیف مقدماتی به منظور آمادگی برای دو تکلیف نهایی اند یعنی همه‌ی اطلاعات و شهود به دست آمده در 5 تکلیف اول می‌توانند در تکلیف نهایی استفاده شوند.

### توصیه‌های کلی برای کار کردن روی این مسایل:

- ابتدا متن همه‌ی تکالیف را بخوانید تا دقیقاً بدانید چه کارهایی باید انجام دهید.
- حواستان به زمانی که برای 5 تکلیف اول صرف می‌کنید، باشد. زمان زیادی را برای دو تکلیف نهایی باقی بگذارید، حداقل سه ساعت.
- اگر در تیم، کارها را بین خودتان تقسیم می‌کنید، پس از انجام هر تکلیف نتایج را با یکدیگر در میان بگذارید.
- در نوشتن تکالیف، با ذکر جزئیات توضیح دهید که چه بررسی‌هایی انجام داده‌اید، اگر لازم بود سؤالات ساده‌تری را بررسی کنید. به این که فقط "به سؤال پاسخ دهید" بسنده نکنید و گزینه‌های جایگزین را بررسی کرده و سعی کنید آن‌ها را بسط دهید. این‌ها معیارهایی است که بررسی‌های شما بر اساس آن داوری خواهد شد.
- آنچه را در نظر دارید، به طور شفاف و واضح بیان کنید.
- در بیان ایده‌های خود هر جا که لازم است از رسم نمودار، جدول یا شکل بهره بگیرید.
- اگر در زمان کار کردن روی مسائل، روش‌ها یا فرآیندهایی را با روند سؤال وفق می‌دهید، در گزارش خود آن‌ها را شرح داده و همچنین علت بیان آن‌ها را ذکر کنید.

### آنچه تحویل می‌دهید:

- تکالیف نهایی بخش اول و دوم
- تکالیف 1 تا 5

### داوری:

این‌ها بخشی از نکاتی است که در داوران در نظر می‌گیرند:

- واضح و منطقی بودن پاسخ‌های نهایی،
- میزان کامل بودن پاسخ‌ها،
- استفاده از ریاضیات،
- استدلال‌ها و توجیه انتخاب‌های انجام شده،
- میزان عمق پاسخ‌ها،
- برای آرایه: قالب و ظاهر، انسجام، خوانایی، استفاده از توضیح و شفاف‌سازی،
- خلاقیت ریاضی در بسط دادن مسائل.

شاد و پیروز باشید!

# واکسیناسیون هدفمند

## مقدمه:

در طول تاریخ، بیماری‌های واگیردار باعث مرگ میلیون‌ها انسان شده‌اند. حتی بیماری‌های (به ظاهر) کم‌ضرر مانند آنفولانزا، قربانی‌های زیادی در قرن 20 میلادی گرفته است؛ برای مثال، در سال‌های 1918-1919 بیماری آنفولانزا بیشتر از کشتگان جنگ جهانی اول، قربانی گرفت.

در ماه‌های اخیر بیماری مسری مانند مننژیت (التهاب پرده‌های مننژ)، سرخک و سرخچه سر تیترا خبرها بوده است. معمولاً مؤثرترین روش برای مبارزه با چنین بیماری‌های واگیرداری، واکسیناسیون است.

هنگام واکسینه شدن، نوع ضعیف شده‌ای از ویروس مورد نظر در بدن تزریق می‌شود. پس از تزریق، بدن انسان شروع به تولید پادتن‌ها علیه این بیماری می‌کند. هنگامی که بدن شما با ویروس واقعی و بسیار قوی مواجه شود، به دلیل وجود این پادتن‌ها شما ایمن هستید و بیمار نخواهید شد.

با این حال مشکلی که همیشه در مورد واکسیناسیون وجود دارد، کمبود واکسن برای همه‌ی افراد جامعه است؛ به خصوص وقتی یک بیماری به صورت غیرمنتظره فراگیر می‌شود. بنابراین، باید در نظر بگیریم که برای به دست آوردن بهترین نتیجه ممکن، کدام گروه (و در چه تعداد) باید واکسینه شوند. این دوره از مسابقه الیمپیا، مربوط به تعیین بهترین شیوه‌ی توزیع واکسن است.

در ابتدا چگونگی شیوع بیماری آنفولانزا را بررسی می‌کنیم. سپس، بررسی خواهیم کرد که چگونه واکسینه شدن یک بخش از جمعیت می‌تواند از همه‌گیر شدن بیماری جلوگیری کند.

در این تکلیف افراد می‌توانند در سه وضعیت قرار گیرند.

- گوییم یک شخص مستعد (M) است، اگر او بتواند به ویروس آنفولانزا الوده شود.
- گوییم یک شخص بیمار (B) است، اگر او ویروس آنفولانزا را داشته باشد و بتواند بیماری را انتقال دهد.
- گوییم یک شخص ایمن (I) است، اگر او واکسینه شده یا بیماری را قبلاً گرفته باشد. در هر دو حالت این فرد هرگز دیگر بیمار نمی‌شود.

فرض می‌کنیم که هر فرد در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد.

## تکالیف اکتشافی – بخش اول

احمد عضوی از یک باشگاه 25 نفره از دوست‌داران دوچرخه سواری است که هر یکشنبه (و گاهی اوقات در روزهای دیگر) به دوچرخه سواری می‌روند. همه‌ی اعضای این باشگاه، در صورت امکان، در دوچرخه سواری شرکت می‌کنند. احمد در روز دوشنبه یک دی‌ماه بیمار می‌شود. او آنفولانزا گرفته است. او در روز قبل یکشنبه (30 آذر) احساس ضعف داشت، با این وجود با فرشاد، کمال و احسان به دوچرخه سواری رفت. در روز پنج‌شنبه 4 دی‌ماه، احسان به احمد گفت که احساس می‌کند بیمار شده است و شب گذشته با این‌که حالش چندان خوب نبوده به برنامه تمرینی دوچرخه سواری با فرید و علی رفته است.

یکشنبه 7 دی‌ماه، فرید، علی، محمد، رضا و دانیال با یکدیگر به دوچرخه سواری می‌روند. احمد، کمال و احسان هنوز بیمار هستند، اما بقیه اعضای باشگاه، در تمرین دوچرخه سواری حضور دارند. دو روز بعد، احمد تقریباً خوب شده ولی فرید بیمار شده است.

روز بعد، یعنی چهارشنبه 10 دی ماه، احمد به حالت عادی برگشته است. رضا و دانیال تصمیم می‌گیرند که آن شب، با هر یک از اعضا که علاقه‌مند هستند به یک تمرین دوچرخه‌سواری فوق برنامه بروند. احمد و رامین نیز همان شب برای صرف شام با هم بیرون می‌روند. دو روز بعد معلوم می‌شود که رامین هم مانند همه‌ی افرادی که چهارشنبه به دوچرخه‌سواری رفتند، آنفولانزا گرفته است. یکشنبه 14 دی احمد، فرشاد، کمال، احسان و چهار عضو دیگر از باشگاه به دوچرخه‌سواری می‌روند. بقیه اعضا باشگاه همچنان درگیر بیماری آنفولانزا هستند. در نهایت، هفته بعد، یک گروه بزرگ به دوچرخه‌سواری می‌روند: به جز امید و هادی، بیماری (آنفولانزای) بقیه‌ی اعضای باشگاه بهبود یافته و در برنامه دوچرخه‌سواری شرکت می‌کنند.

## تکلیف 1

درست یا غلط بودن جملات زیر را بر اساس داستان بیان شده، مشخص کنید و توضیح دهید چرا هر کدام درست یا غلط است:

"در این باشگاه هیچ کس در 30 آذرماه، نسبت به بیماری آنفولانزا ایمن نبوده است."  
"حتی اگر شما بیمار هستید، لزومی ندارد احساس کنید بیمار هستید"

## تکلیف 2

با نگاه به گذشته، ممکن است بگویید که اگر احمد واکسینه شده بود، احتمالاً کل اعضای باشگاه دوچرخه‌سواری آنفولانزا نمی‌گرفتند. اما این دیدگاه، با واقعیت متفاوت است! در یک نمایش گرافیکی جریان واقعی انتقال آنفولانزا را در باشگاه دوچرخه‌سواری نشان دهید.

### تکالیف اکتشافی - قسمت دوم

در سه تصویر زیر، وضعیت یک گروه صد نفره از مردم را می‌بینید. دو نفر از آن‌ها آنفولانزا دارند که در جدول با "B" نشان داده شده‌اند. همچنین افراد واکسینه شده با "I" نشان داده شده‌اند (این افراد ایمن هستند). افراد باقی مانده (مستطیل‌های خالی) افراد مستعد هستند. فرض کنید روزانه هر فرد به طور مستقیم با همسایگان خود در تماس است؛ بنابراین، در هر روز، هر فرد حداکثر با چهار نفر در ارتباط خواهد بود. توجه داشته باشید این تصاویر در پیوست نیز (در سه نسخه) آورده شده‌اند.

## تکلیف 3

برای هر وضعیت داده شده، بررسی کنید که پس از چند روز همه‌ی افرادی که می‌توانند مریض شوند، مریض خواهند شد.

وضعیت اول:

		B							
					B				

وضعیت دوم:

			I						I
	I								
		B							
I				I	I	I			
		I			B				
								I	
I									

وضعیت سوم:

I	I	I	I	I	I	I		I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	B		I	I	I	I	I	I
I	I	I	I		I	I	I	I	I
I	I	I		I		I	I	I	I
I	I	I	I	I	B	I	I	I	I
	I	I	I	I	I	I	I		I
I	I	I	I	I	I		I	I	
I	I		I	I	I	I	I	I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I

#### تکلیف 4:

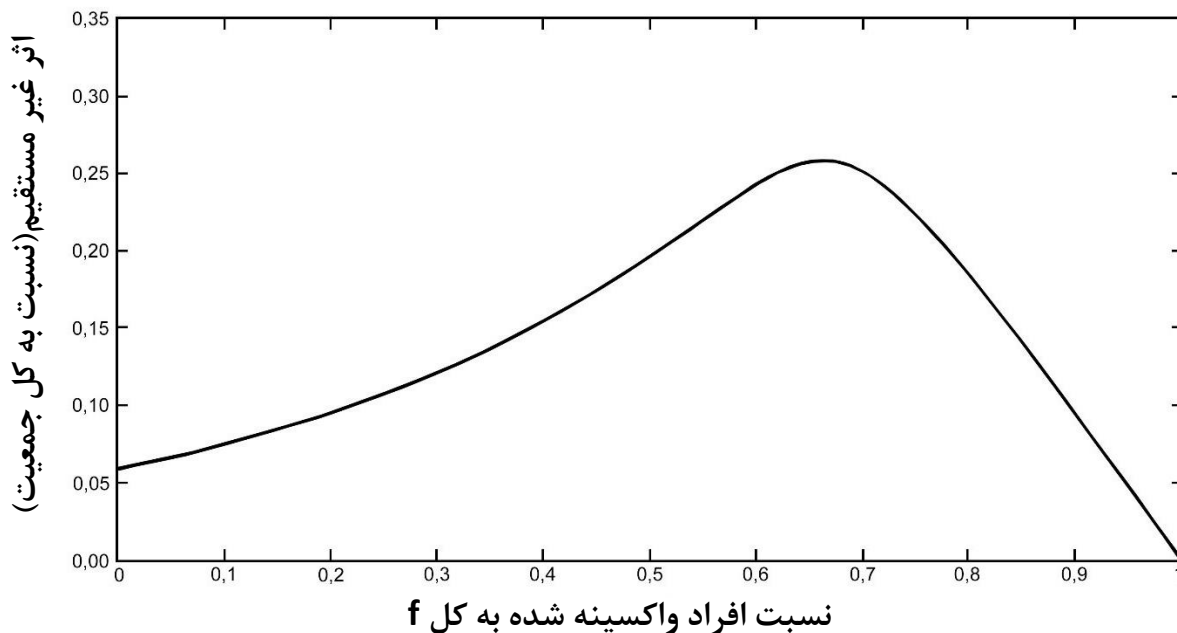
کمترین تعداد افراد واکسینه شده را مشخص کنید به طوری که کمترین افراد بین این 100 نفر مریض شوند. انتظار می‌رود شما برای حل این تکلیف از جدول‌هایی مانند جدول‌های تکلیف 3 استفاده کنید.

همچنین مسئله بالا را برای وضعیتی که افراد، در هر روز، حرکت آزادانه و در نتیجه با افراد دیگر ارتباط داشته باشند، حل کنید. برای مثال، هر فرد در هر روز، چهار همسایه متفاوت داشته باشد.

## تکلیف 5:

در تکلیف‌های قبل دیدیم که به منظور جلوگیری از مبتلا شدن «تعداد زیادی» به بیماری، لازم نیست همه افراد واکسینه شوند. اینکه «تعداد زیاد» دقیقاً چقدر است را فعلاً کنار می‌گذاریم. آنچه مهم است تعداد افراد واکسینه شده است. در ادامه، منظور از واکسینه شدن در برابر بیماری آنفولانزا، یعنی فرد واکسینه شده بیماری را هرگز نخواهد گرفت (فرد واکسینه شده کاملاً در برابر بیماری ایمن است). این تاثیر واکسن را **تاثیر مستقیم** می‌نامیم. تاثیر غیرمستقیم واکسیناسیون به این معنی است که بخشی از جامعه که واکسینه نشده اند توسط افرادی که واکسینه شده و ایمن هستند احاطه شده اند. بنابراین افرادی که واکسینه نشده اند در تماس با افراد مبتلا نیستند و در نتیجه شانس کمتری برای ابتلای آنها وجود دارد. این سازوکار را ایمنی جمعی می‌نامیم

مطالعات نشان داده است که تاثیر غیرمستقیم واکسیناسیون، به نسبت افراد واکسینه شده به کل جمعیت بستگی دارد. در نمودار زیر این وابستگی نشان داده شده است (نسخه‌ی بزرگتری از این نمودار در پیوست آورده شده است).



به عنوان مثال از روی نمودار می‌توان نتیجه گرفت اگر نیمی از جمعیت واکسینه شده باشند ( $f = 0.5$ )، آنگاه تاثیر غیرمستقیم تقریباً برابر با 0.20 است. در نتیجه مجموعاً 70 درصد از افراد جامعه ایمن هستند (یا به اصطلاح پوشش داده شده‌اند).

روئل کوتینیو (ویروس‌شناس و مدیر مرکز بیماری‌های واگیردار) می‌گوید: "واکسیناسیون فقط از شما محافظت نمی‌کند بلکه از دیگر افراد جامعه هم محافظت می‌کند. اگر میزان پوشش، از یک حد بحرانی کاهش یابد آنگاه همه‌ی افراد جامعه در معرض خطر قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه، در انگلستان، زمانی که میزان پوشش برای بیماری سرخک زیر 80 درصد بود، بیماری مجدد فراگیر شد." به کمک نمودار داده شده، می‌توانید نموداری رسم کنید که نسبت افراد ایمن شده، به افراد واکسینه شده را نشان دهد. تحقیق کنید برای چه نسبت افراد واکسینه شده، میزان پوشش زیر 80 درصد می‌شود.

### تکلیف نهایی:

بخش اول:

در سه دبیرستان شهر امبرهاون (Amberhavn) به ترتیب 1000، 2000 و 4000 دانش‌آموز وجود دارد. هیئت امنای این مدرسه‌ها در نظر دارند، دانش‌آموزان را به بهترین نحو در برابر آنفولانزا ایمن کنند. اما، تنها تعداد محدودی واکسن برای این سه مدرسه موجود است: در مجموع 3000 واکسن برای هر سه مدرسه. هیئت امنای این سه مدرسه می‌خواهند بدانند چه گونه این تعداد واکسن را بین این مدارس توزیع کنند به طوری که کمترین تعداد از دانش‌آموزان بیمار شوند. تکلیف شما به عنوان عضوی از کمیته‌ی مشاور به شکل زیر است:

بررسی کنید توزیع‌های گوناگون واکسن‌ها بین مدارس چه تاثیراتی خواهد داشت و بر اساس آن، گزارشی از بهترین توصیه خود را برای هیئت امنای مدرسه‌ها تهیه کنید. برای مثال شما می‌توانید از نمودارها و جدول‌ها برای واضح‌تر نمودن توضیحات خود استفاده نمایید.

می‌توان فرض کرد دانش‌آموزان مدارس مختلف با یکدیگر ارتباطی ندارند، اما همه دانش‌آموزان یک مدرسه با هم در ارتباط هستند.

بخش دوم:

در قسمت اول تحقیق کردید که بهترین روش تقسیم تعداد محدودی واکسن، بین دانش‌آموزان سه مدرسه، در یک شرایط خاص، چیست. در بخش قبل فرض شده بود دانش‌آموزان در یک مدرسه با یکدیگر ارتباط زیادی دارند در حالی که دانش‌آموزان مدارس مختلف با هم ارتباطی ندارند. به طور کلی، می‌توانید مدرسه‌ها را به عنوان گروه‌هایی از یک جامعه در نظر بگیرید که ارتباط زیاد و یا ارتباط اندکی با یکدیگر دارند. در این بخش از تکلیف نهایی، هیئت امنایی در کار نیست، اما وزارت بهداشت مسئول توزیع تعداد محدودی واکسن بین افراد جامعه است. ممکن است تعداد واکسن‌ها نسبت به بخش اول، بیشتر یا کمتر باشد و یا گروه‌های بیشتری در جامعه در نظر گرفته شده باشند؛ بنابراین تعیین توزیع واکسن‌ها پیچیده‌تر از بخش قبل خواهد بود.

در این قسمت از تکلیف نهایی (که قسمت پایانی است) درباره‌ی تاثیر این عوامل بر روی بهترین توزیع ممکن واکسن‌ها بین افراد جامعه تحقیق می‌کنید. نتایجی را که به دست می‌آورید در قالب یک گزارش به وزارت بهداشت ارائه دهید به طوری که در آن، چگونگی عملیاتی کردن توزیع واکسن‌ها برای گروه‌ها مشخص شده باشد.



راهنمایی: ابتدا فقط تعداد واکسن‌های در دسترس را تغییر دهید. برای مثال، ابتدا فرض کنید تعداد نفرات هر گروه مانند بخش اول است و تعداد واکسن‌ها ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۴۰۰۰ عدد است. سپس تاثیر تغییر سایر عوامل را بررسی کرده و گزارش خود را تکمیل کنید.

ضمیمه برای تکلیف 3 وضعیت اول

		B							
					B				

		B							
					B				

		B							
					B				

ضمیمه برای تکلیف 3 وضعیت دوم

		B							
					B				

		B							
					B				

		B							
					B				

ضمیمه برای تکلیف 3 وضعیت سوم

		B							
					B				

		B							
					B				

		B							
					B				

ضمیمه برای تکلیف 5

