

در صف زدن (برای تفریح!)



دور مقدماتی ۲۹امین مسابقه‌ی ریاضی ای‌لیمپیا

نوامبر ۲۰۱۷

Colophon

The Mathematics Alympiad (Wiskunde Alympiade) is an initiative of the Freudenthal Institute, Utrecht University. The Alympiad committee is responsible for the organisation of the Alympiad and for producing the assignment.

The committee consists of:

Eric van Dijk

Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan

Freudenthal Institute, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Duitsland

Jacques Jansen

Strabrecht College, Geldrop

Kim Kaspers

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Ruud Stolwijk

CITO, Arnhem, Vrijeschool Zutphen VO, Zutphen

Monica Wijers

Freudenthal Instituut, Utrecht

Secretariat:

Liesbeth Walther and Mariozee Wintermans

Freudenthal Instituut, Utrecht

The Alympiade is supported by:

Ministry of Education, Culture and Science (OCW)

CASIO, Amstelveen

Texas Instruments, Utrecht

راهنمای وظایف مربوط به دور مقدماتی مسابقه‌ی ریاضی ای‌لیمپیاد سال ۲۰۱۷-۲۰۱۸

این تکلیف شامل سه بخش است: بخش ۱ (۱-الف و ۱-ب همراه با هفت تکلیف مقدماتی)، بخش ۲ که نمایش گرافیکی است (همراه با چهار تکلیف)، و بخش ۳: کاربرد (همراه یک تکلیف و تکلیف نهایی). تکالیف (مقدماتی) در بخش‌های ۱ تا ۳ دست‌گرمی برای بخش ۳ هستند: همه‌ی دانش و دیدی که در این تکالیف به دست می‌آوردید برای حل موفق تکلیف نهایی نیاز است.

توصیه‌های کلی برای کار روی این تکلیف

- ابتدا تمامی متن تکلیف را مطالعه کنید تا بدانید که چه باید بکنید.
- مراقب زمانی که برای بخش‌های مقدماتی صرف می‌کنید باشید. بخش زیادی از زمان خود را برای بخش ۳ اختصاص دهید، حداقل سه ساعت. اگر کارها را در گروه خود تقسیم می‌کنید، در مورد نتایج حاصل از هر تمرین با هم بحث و گفت‌وگو کنید.
- برای بسیاری از تکالیف، این شاید ایده‌ی خوبی باشد که تعدادی مثال عددی امتحان کنید تا تکلیف را بهتر متوجه شوید.
- اگر دیدگاه، روش یا رویه‌ی مشخصی برای حل تکالیف استفاده می‌کنید، به طور دقیق آن‌ها را در گزارش خود ارائه دهید و توضیح دهید چرا از آن‌ها استفاده می‌کنید.

آن‌چه باید تحویل دهید

- تکلیف نهایی.
- تکالیف (مقدماتی) ۱ تا ۱۱، همراه با تکالیف تحلیلی ضمیمه

داوری

برخی از مواردی که هیئت داوران در ارزیابی کار مد نظر قرار خواهد داد عبارت هستند از:

- خوانایی و روشن بودن تکلیف نهایی
- کامل بودن پاسخ به بخش‌های مختلف
- بهره‌گیری از ریاضیات
- استدلال‌های به کار رفته و توجیه انتخاب‌هایی که کرده‌اید
- عمق پاسخ‌گوئی به پرسش‌های مختلف
- ارائه: شکل، پیوستگی، خوانائی، نمودارها و عکس‌ها، و استفاده از ضمیمه‌ها.
- نوآوری و خلاقیت (ریاضی) در تکمیل پاسخ تکالیف

خوش بگذرد و موفق باشید

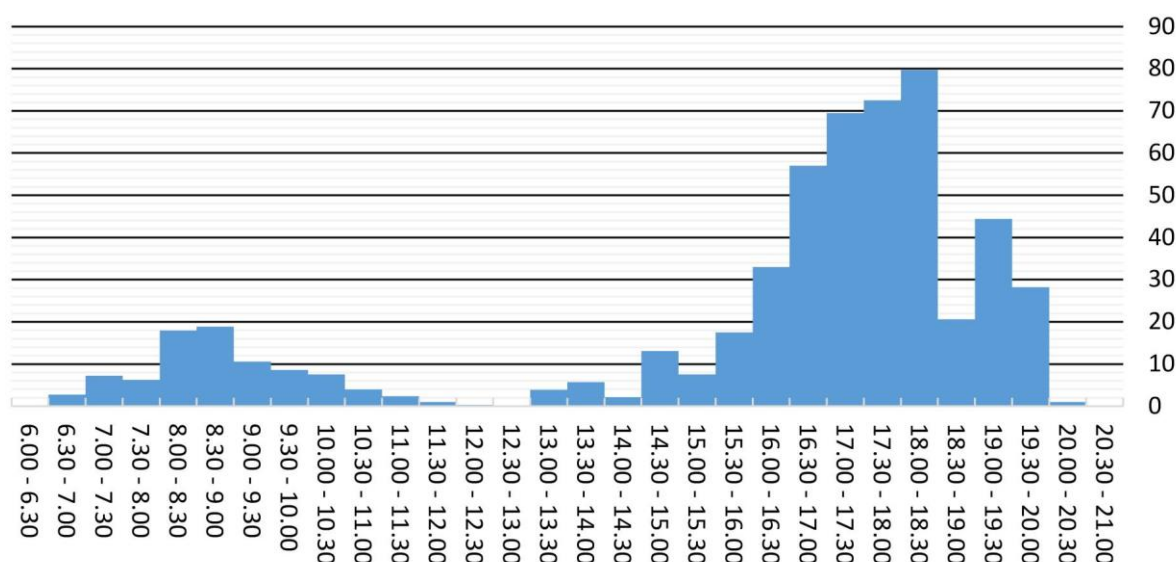
به خط شدن در بزرگراه. راه‌بندان و ترافیک بخشی از زندگی روزانه‌ی ما شده است، به خصوص در نزدیکی شهرهای بزرگ. هیچ کس دوست ندارد در آن باشد، اما زمان و اکثر افراد مجبور هستند در نهایت چنین انتخابی داشته باشند، و این سبب می‌شود گزارش‌های ترافیکی رادیویی شبیه به این را بشنویم که «در این لحظه ۱۲ صف با طول کل ۴۴ کیلومتر تشکیل شده است. شاهد یک طول ۲ کیلومتری از ترافیک با حرکت آرام و ترافیک ایستا در تقاطع امبرگرون هستیم.»

در این تکلیف ای‌لیمپیاد شما با بهره‌گیری از «اصطلاحات فنی» پدیده‌ی «صف» را مورد بررسی قرار می‌دهید. در طول تکلیف مقدماتی، شما می‌آموزید که چه‌طور این اصطلاحات را به کار ببرید. در نهایت شما از این‌ها در تکلیف نهایی استفاده می‌کنید.

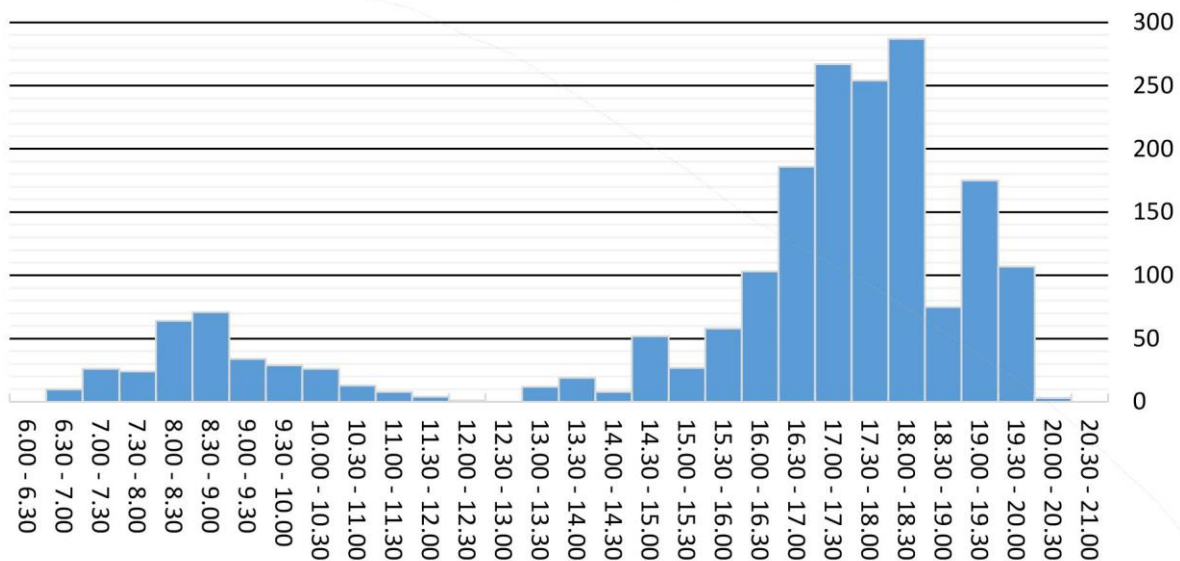
بخش ۱-الف: مقدماتی - وزن راه‌بندان

بر وب‌سایت سازمان ترافیک آمبره‌اون، داده‌های تشکیل صف نگاه‌داری می‌شود. در شکل زیر شما نمودار تعداد و طول کل صف‌هایی را که در ۵ اکتبر امسال در آمبره‌اون تشکیل شده می‌بینید.

تعداد صف‌ها



طول کل صفها



۱. طول متوسط یک صف بین ساعت ۱۷:۰۰ تا ۱۹:۰۰ در ۵ اکتبر امسال در آمبرهاون چه قدر بوده است؟

همه‌ی صف‌ها مانند هم نیستند. ماندن برای ۲ ساعت در یک صف ۳ کیلومتری تجربه‌ای متفاوت از ماندن برای ۲۰ دقیقه در یک صف ۶ کیلومتری است. حاصل ضرب طول صف به کیلومتر در مدت به دقیقه را وزن راه‌بندان می‌نامند.

قانون این است: طول صف (کیلومتر) × مدت صف (دقیقه) = وزن راه‌بندان

اگرچه از نمودارها نمی‌توانید بخوانید که یک شخص خاص چه مدت زمان در یک صف با طول مشخص سپری کرده است، می‌توانید بخوانید که برای مثال بین ساعت ۱۴:۳۰ تا ۱۵:۰۰، طول کل راه‌بندانی حدود ۵۰ کیلومتر (تقسیم بر ۱۳ صف) وجود داشته است.

۲. با استفاده از هر دو نمودار وزن راه‌بندان کل آمبرهاون در ساعات اوج ترافیک بعد از ظهر ۵ اکتبر را محاسبه کنید.

بخش ۱-ب: مقدماتی - چه زمانی صف تشکیل می‌شود؟

زمانی که ترافیک می‌تواند در جاده بدون هیچ تاخیری حرکت کند از آن به ترافیک روان نام برده می‌شود.

سازمان ترافیک آمبرهاون از تعریفی استفاده می‌کند که «صف» شامل همه سه نوع راه‌بندان زیر است:

- ترافیک کند: زمانی که ترافیک در طول فاصله‌ای که حداقل ۲ کیلومتر طول دارد نمی‌تواند سریع‌تر از ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، اما به طور کلی سریع‌تر از ۲۵ کیلومتر بر ساعت است.
- ترافیک ایستا: زمانی که ترافیک در طول فاصله‌ای که حداقل ۲ کیلومتر طول دارد تقریباً همیشه آرام‌تر از ۲۵ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند.
- ترافیک کند تا ایستا: ترافیک کند در فواصلی به طور کلی طولانی‌تر، که «گروه‌هایی» از ترافیک ایستا نیز در آن رخ می‌دهد.

برای این که بتوانید بفهمید برای تشکیل ترافیک چه فاکتورهایی را لازم است در نظر بگیرید، یک جاده‌ی فرضی در نظر بگیرید. در شب جاده تقریباً خالی است و هیچ صفی در آن وجود ندارد. هر خودرو فضای کافی دارد که با حداکثر سرعت مجاز حرکت نماید بدون این که راه‌بندانی را تجربه کند. اگر خودروهای بیش‌تری را اضافه کنید، هنوز این شرایط وجود دارد؛ اگرچه یک کران برای آن وجود دارد: زمانی که تعداد خودروها بیش از تعدادی است که جاده می‌تواند تحمل کند. کدام فاکتورها در تعیین این که چه زمانی صف تشکیل می‌شود موثر است؟ برخی از مواردی که ممکن است شما در نظر بگیرید در ادامه ارائه می‌شود:

- شدت (I): تعداد وسیله‌ی نقلیه‌ی موتوری در ساعت است که از یک نقطه‌ی مشخص از جاده می‌گذرد. مقدار حداکثر شدت را ظرفیت می‌نامند.
- سرعت (v): متوسط سرعت همه‌ی وسایل نقلیه‌ی موتوری در قطعه‌ای از جاده است که به صورت کیلومتر بر ساعت بیان می‌شود.
- تراکم (D): تعداد وسیله‌ی نقلیه‌ی موتوری در کیلومتر در قطعه‌ای از جاده است..

$$3. \quad \text{دلیل بیاورید که } \frac{I}{D} = v$$

ابتدا سعی کنید یک یا چند مثال عددی محاسبه کنید تا ایده‌ای در مورد آن پیدا کنید.

برای این که مقداری بیش‌تر با این مفاهیم آشنا شوید، ابتدا تعدادی محاسبه انجام می‌دهیم. به عنوان مثال یک جاده ۲۰ کیلومتری از A به B در نظر بگیرید که در هر جهت یک باند برای حرکت دارد. این راه ظرفیت ۲۲۰۰ خودرو در ساعت دارد: این به این معنا است که حداکثر ۲۲۰۰ خودرو در ساعت می‌تواند از نقطه‌ی A به B بدون راه‌بندان ترافیکی حرکت کند. سوالات بعدی همگی برای این جاده از A به B مطرح شده است.

۴. سرعت متوسط را ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت در نظر بگیرید. اگر ۲۰۰۰ خودرو در ساعت از A به B حرکت کنند (بنابراین ۲۰۰۰ $I =$ ، میزان متوسط فضایی را محاسبه نمایید که به هر خودرو اختصاص می‌یابد.

۵. چه میزان فضا به هر خودرو اختصاص می‌یابد زمانی که به ظرفیت جاده (۲۲۰۰ خودرو در ساعت) می‌رسیم؟

۶. اگر همه‌ی خودروها در یک صف مجازی باشند که کاملاً ایستاده و بدون حرکت هستند، ماشین‌ها می‌توانند «سپر به سپر» بایستند. یک فرض واقع‌بینانه برای طول یک خودرو در نظر بگیرید و بر اساس آن، سرعت متوسط در صف را تعیین کنید وقتی خودروها «سپر به سپر» هستند.

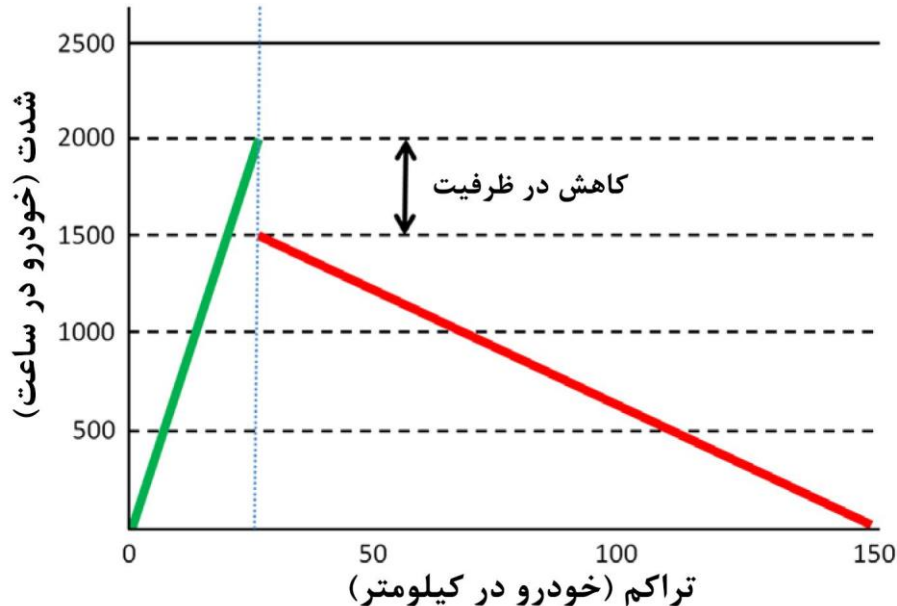
۷. یک مثال برای تراکم ارائه کنید که برای جاده A به B یاد شده غیر قابل دسترسی باشد و سرعت متناظر (غیرممکن) آن را نیز محاسبه کنید.

بخش ۲: ارائه‌ی گرافیکی

تفاوتی بین ظرفیت جاده در «ترافیک روان» و ظرفیت جاده در راه‌بندان وجود دارد. نمودار زیر نشان می‌دهد که یک رابطه‌ی خطی بین تراکم و شدت وجود دارد.

شاخه‌ی چپ نمودار نمایانگر این ارتباط است زمانی که «ترافیک روان» است. سرعت ثابت است، و تراکم و شدت از چپ به راست افزایش می‌یابد.

شاخه‌ی راست نمودار نمایانگر این ارتباط است زمانی که راه‌بندان ترافیکی و تاخیر وجود دارد، و از چپ به راست تراکم افزایش و سرعت کاهش می‌یابد.



نمودار نشان می‌دهد که برای مقادیر زیادی از شدت، دو مقدار مختلف برای تراکم وجود دارد: یک مقدار برای شرایط «ترافیک روان» و یک مقدار برای «راه‌بندان». هر یک از این مقادیر مختلف تراکم، مقداری (متفاوت) برای سرعت نیز به طور متناظر خواهد داشت. بر اساس رابطه‌ی بین سرعت، تراکم و شدت که در تکلیف ۴ بود، می‌توانید این نمودار را نمودارهایی تبدیل کنید که سایر روابط دو به دو را نمایش دهد، برای مثال نموداری که رابطه‌ی بین تراکم و سرعت را نشان دهد.

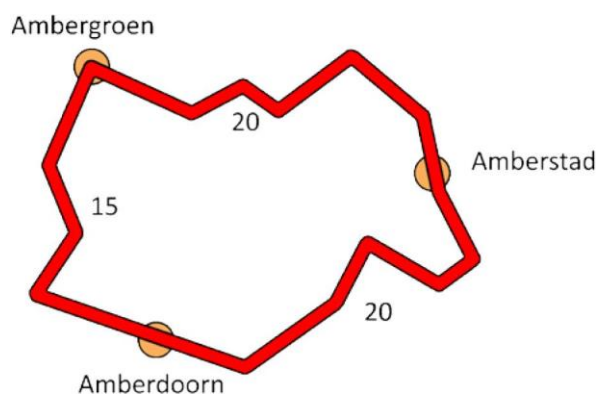
۸. در نمودار می‌توانید ببینید که برای تراکم ۲۵ وسیله‌ی نقلیه در کیلومتر، شدت به طور ناگهانی کاهش می‌یابد. سرعت‌های متناظر را محاسبه کنید و تا می‌توانید به طور شفاف توضیح دهید که این افت در ظرفیت در این مورد به چه معنایی است.

۹. نمودار داده شده را به نموداری تغییر دهید که رابطه‌ی تراکم با سرعت را نشان دهد.

۱۰. نمودار داده شده را به نموداری تغییر دهید که رابطه‌ی سرعت با شدت را نشان دهد.

۱۱. تا می‌توانید به طور شفاف توضیح دهید که چه طور می‌توان ظرفیت یک جاده را بر اساس v, I و D محاسبه نمود.

بخش ۳: کاربرد



در این جا نقشه‌ی جاده‌ها در محدوده‌ی آمبرهاون با فواصل بین شهرهای آمبرگرون، آمبرستاد، و آمبردورن بر حسب کیلومتر ارائه شده است.

در زیر شما تعداد خودروهایی که بین این شهرها در ساعت اوج ترافیک در صبح و بعد از ظهر یک روز از هفته تردد می‌کنند مشاهده می‌کنید. فرض می‌کنیم جاده شامل یک باند در هر جهت است که سرعت حداکثر مجاز در آن ۸۰ کیلومتر بر ساعت باشد.

ساعت اوج ترافیک در صبح

From\to	Ambergroen	Amberstad	Amberdoorn
Ambergroen		2000	3000
Amberstad	1500		1500
Amberdoorn	4000	1200	

ساعت اوج ترافیک در بعد از ظهر

From\to	Ambergroen	Amberstad	Amberdoorn
Ambergroen		5000	6000
Amberstad	4000		1500
Amberdoorn	1000	1800	

تکلیف: گلوگاه‌های این شبکه‌ی جاده‌ای را تحلیل کنید.

بررسی کنید که کجا و چه زمانی در این شبکه‌ی جاده‌ای حداکثر ریسک ترافیک ایستا و تاخیرها وجود دارد، و چه طور شما می‌توانید جریان ترافیک را بهبود دهید. شما می‌توانید تا حداکثر ۳۰ کیلومتر جاده‌ی اضافه بسازید. از نمودارهای تکالیف مقدماتی استفاده کنید تا تعداد خودروهایی که از یک نقطه‌ی مشخص در بازه‌ی زمانی مشخص عبور می‌کنند تخمین بزنید. دلیل بیاورید که تراکم و شدت جاده‌ها (در وضعیت فعلی) چیست. همچنین بررسی کنید آیا راه‌بندانی وجود دارد؟ این آنالیز را مبنایی برای تکلیف نهایی قرار دهید.

تکلیف نهایی: مقاله‌ی روزنامه‌ای

یک مقاله‌ی روزنامه‌ای بنویسید که در مورد مشکلات ترافیکی این شبکه‌ی جاده‌ای باشد. شما از نمودارهای بخش «ارائه‌ی گرافیکی» برای این منظور استفاده خواهید کرد، و توضیحاتی ارائه کنید که خواننده متوجه شود چه چیزی از این نمودار می‌تواند بخواند. همچنین حداقل از عبارت «وزن راه‌بندان» استفاده کنید. به‌علاوه، حداقل یک جواب قابل دست‌یابی برای مشکلات راه‌بندان این شبکه‌ی جاده‌ای ارائه کنید (با فرض گزینه‌ی ساخت جاده‌ی اضافه). شما باید مبنایی و شالوده‌ی پاسخ خود را ارائه کنید.